EXERCICES SUR LES INTEGRALES GENERALISEES

1. Calculer les inégrales généralisées suivantes.

$$a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \qquad b)\ \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad c)\ \int_0^1 \ln x\,dx$$

$$d)\ \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx \qquad e)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx \qquad f)\ \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \quad (n\in\mathbb{N})$$

$$g)\ \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \qquad h)\ \int_a^\infty \frac{dx}{x(x+r)} (a>0,\ r>0) \qquad i)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

2. Soit $a>1$. Calculer $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2-1}$.

3. Montrer que les intégrales suivantes convergent.

$$a)\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \quad , \quad b)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1{+}\sin x)\,dx \quad , \quad c)\ \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \quad , \quad d)\ \int_0^\infty \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\,dt\,.$$

4. Déterminer pour quelles valeurs du couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ les intégrales suivantes sont convergentes. (On dessinera dans le plan l'ensemble des couples (α,β) pour lesquels il y a convergence).

$$a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)} \quad , \quad b)\ \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,dx \quad , \quad c)\ \int_0^\infty \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,dt\,.$$

5. Etudier pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale

$$I(n) = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^n}\,dx$$

converge et calculer $I(n)$ dans ce cas.

6. Soit $I(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\lambda})}$. Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel λ et calculer cette intégrale en utilisant le changement de variable $t = 1/x$.

7. Soit $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$, la relation

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,.$$

c) En déduire le calcul de I.

d) En déduire le calcul de $\int\limits_0^{1} \frac{x-1}{\ln x}\, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

8. Soit $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Montrer que $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$.

c) Montrer que $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2}\, dx$.

d) En déduire la valeur de I.

9. Soit $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Calculer $J = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

c) En déduire I.

10. a) Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^n}$ converge.

b) Calculer J_1.

c) Montrer que si $n \geq 2$, on a

$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\, J_n\,,$$

et en déduire J_n si $n \geq 1$.

11. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan x\, dx$ diverge,

a) par un calcul de primitive ; b) par le critère de Riemann.

12. Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes.

$$a)\ \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx \quad b)\ \int_{-1}^\infty \cos(x^2)\, dx\ \text{(poser } u = x^2) \quad c)\ \int_\pi^\infty x^2 \sin(x^4)\, dx \quad d)\ \int_\pi^\infty \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}\, dx\,.$$

13. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique dont l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\, dx$ est convergente. Montrer que f est la fonction nulle. (Raisonner par l'absurde : supposer que $f(c) \neq 0$ pour un certain réel c, et montrer que le critère de Cauchy est alors contredit).

14. Soit f une fonction uniformément continue de $[\,a,\,\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (montrer que sinon le critère de Cauchy serait contredit).

15. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, quand x tend vers $\pm\infty$, on ait

$$f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

a) Démontrer que les limites L et ℓ de f en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement existent.

b) On suppose en outre que, pour tout x réel, on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Montrer que $|L - \ell| \leq \pi$.

16. Soit f une fonction décroissante de $[\,a,\,\infty\,[$ dans $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

(Remarquer que l'on a, si $x \geq a$, l'inégalité : $\displaystyle xf(2x) \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt$).

b) Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

17. Construire une fonction f continue positive non bornée de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ soit convergente.

18. Déterminer la limite des suites (a_n) définies ci-dessous.

$$a)\quad a_n = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n(1+x^2)}\,dx\ ,\ b)\quad a_n = \int_0^{1} \frac{dx}{1+x^n}\ ,\ c)\quad a_n = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}\ ,\ d)\quad a_n = \int_0^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{n+1}{n}\,x\right)}{1+x^2}\,dx\,.$$

19. Soit $a > 0$. On définit sur $[a, +\infty[$ les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,.$$

a) Montrer que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$.

20. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x \ln|x+1|}{x^2+1}\,.$$

Montrer les propriétés suivantes.

a) La fonction f est intégrable au voisinage de -1.

b) Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ sont divergentes.

c) La limite de l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$, lorsque A tend vers $+\infty$ existe et est finie. (Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)+f(-x)|\,dx$).

Corrigé

1. a) On a

$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,.$$

Cette expression est de la forme $u'/(1+u)^2$ et admet comme primitive $-1/(1+u)$, donc

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Une primitive de $e^{-\sqrt{x}}/\sqrt{x}$ est $-2e^{-\sqrt{x}}$, donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_0^\infty = 2(\lim_{x\to 0} e^{-\sqrt{x}} - \lim_{x\to\infty} e^{-\sqrt{x}}) = 2\,.$$

c) Une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$, donc

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_0^1 = -1 - \lim_{x\to 0}(x\ln x - x) = -1\,,$$

car la limite de $x\ln x$ est nulle en 0.

d) En intégrant par parties

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\,,$$

donc

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) + 1 = 1\,.$$

e) En intégrant par parties

$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \int \frac{dx}{x(1+x)}\,.$$

Mais en décomposant la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\,,$$

on obtient

$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(1+x) = \frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\,.$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx = \left[\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right]_0^1 = -\ln 2 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = -\ln 2\,.$$

f) Posons $I_n = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$. Puisque les fonctions intégrées sont positives, la fonction F_n définie par

$$F_n(\alpha) = \int\limits_0^\alpha x^n e^{-x}\,dx\,,$$

est croissante et possède une limite finie ou non à $+\infty$.

En intégrant par parties, si $n \geq 1$.

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + \int n x^{n-1} e^{-x}\,dx\,.$$

Mais

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0\,.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int\limits_0^\alpha x^n e^{-x}\,dx = n \lim_{\alpha\to\infty} \int\limits_0^\alpha x^{n-1} e^{-x}\,dx\,,$$

et donc

$$I_n = n I_{n-1}\,.$$

On a

$$I_0 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,,$$

donc l'intégrale I_n converge et

$$I_n = n(n-1)\cdots 1\cdot I_0 = n!\,.$$

g) Comme $\arctan x$ a pour dérivée $1/(1+x^2)$, on a

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\,,$$

et

$$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\,(\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

h) La fraction rationnelle se décompose facilement, puisque

$$\frac{1}{x(x+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+r}\right)\,,$$

et admet sur $[\,a,\,\infty\,[$ la primitive $\dfrac{1}{r}\,\ln\dfrac{x}{x+r}$, donc

$$\int\limits_a^\infty \frac{dr}{x(x+r)} = \left[\frac{1}{r}\,\ln\frac{x}{x+r}\right]_a^\infty = \frac{1}{r}\left(\ln\frac{a+r}{a} + \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{x+r}\right) = \frac{1}{r}\,\ln\frac{a+r}{a}\,.$$

i) Une primitive de $\cos 2x/\sqrt{\sin 2x}$ est $\sqrt{\sin 2x}$, donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx = \left[\sqrt{\sin 2x}\right]_0^{\pi/2} = \lim_{x\to\pi/2} \sqrt{\sin 2x} - \lim_{x\to 0} \sqrt{\sin 2x} = 0\,.$$

2. On décompose la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\,.$$

Pour $x \geq a > 1$, cette fonction admet comme primitive $\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$ Alors

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_a^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}\,.$$

3. a) Au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\,,$$

donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2-x+1}}\, dx$ converge par comparaison à $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$.

Lorsque $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \leq e^{-x}\,,$$

et l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$ converge par comparaison à $\int_1^\infty e^{-x} dx$.

b) Cherchons un équivalent de $\ln(1+\sin x)\, dx$ au voisinage de $-\pi/2$. Posons $u = x + \pi/2$. Alors

$$\ln(1+\sin x) = \ln(1-\cos u) = \ln\left(\frac{u^2}{2} + \circ(u^2)\right) = 2\ln u \left(1 + \frac{\ln(1/2 + \circ(1))}{2\ln u}\right) \sim 2\ln u\,.$$

Mais l'intégrale $\int_0^1 \ln u\, du$ converge (Voir ex 1c) et $\ln u$ est négative. Donc l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\sin x)\, dx$ converge.

c) On peut donner deux arguments montrant la convergence de l'intégrale.

(i) Lorsque $t > 1$, on a $t^2 > t$, donc $e^{-t^2} < e^{-t}$, et l'intégrale $\int^\infty e^{-t^2} dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\int^\infty e^{-t} dt$.

(ii) Lorsque t tend vers l'infini, $t^2e^{-t^2}$ admet 0 comme limite, donc est majoré par 1 sur un intervalle $[a, \infty[$. Alors $e^{-t^2} \leq 1/t^2$, et l'intégrale $\int^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\int^{\infty} \frac{dt}{t^2}$.

d) On a, si $t > 0$,

$$0 \leq \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}} \leq \frac{2}{t^{3/2}}\,,$$

et l'intégrale $\int^{\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\,dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\int^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$.

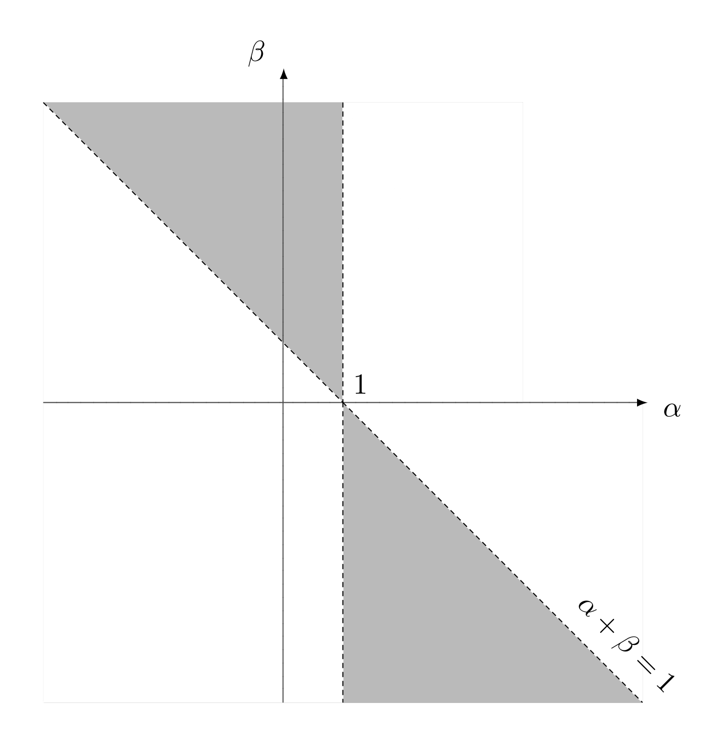
4. a) Cherchons un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^{\beta})}\,.$$

Le résultat dépend du signe de β. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en ∞	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$
$\beta > 0$	$\frac{1}{x^{\alpha}}$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\alpha < 1$	$\alpha + \beta > 1$
$\beta = 0$	$\frac{1}{2x^{\alpha}}$	$\frac{1}{2x^{\alpha}}$	$\alpha < 1$	$\alpha > 1$
$\beta < 0$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\frac{1}{x^{\alpha}}$	$\alpha + \beta < 1$	$\alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\beta = 0$.



b) Même méthode. Les équivalents dépendent du signe de α cette fois.

Remarquons que si $\alpha > 0$, alors x^α tend vers 0 en 0 donc

$$\ln(1 + x^\alpha) \sim x^\alpha \,,$$

et si $\alpha < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \ln(1 + x^\alpha) &= \ln(x^\alpha) + \ln(1 + x^{-\alpha}) \\ &= \alpha \ln x \left(1 + \frac{\ln(1 + x^{-\alpha})}{\alpha \ln x}\right) \,, \end{aligned}$$

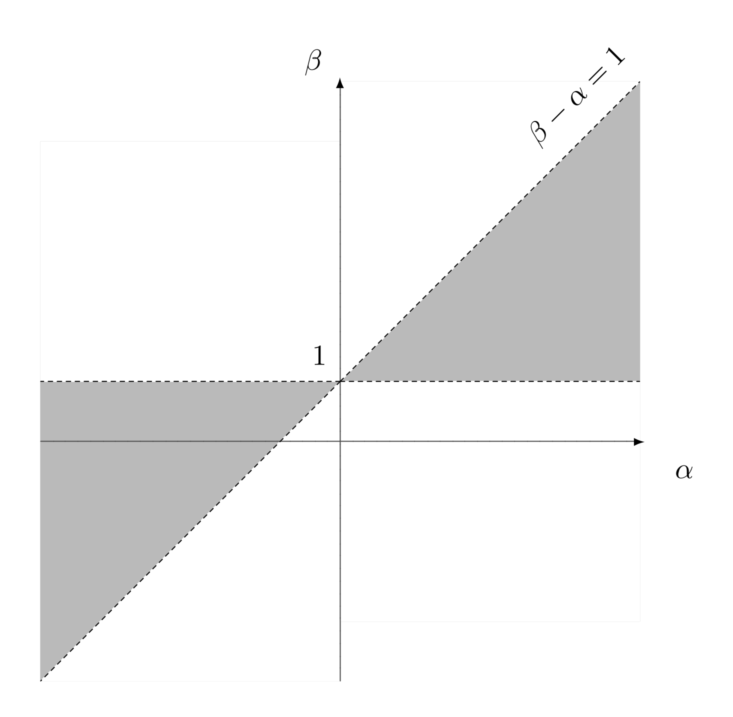
et donc

$$\ln(1 + x^\alpha) \sim \alpha \ln x \,.$$

On a des résultats inversés en $+\infty$. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en ∞	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(x)\,dx$
$\alpha > 0$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\beta - \alpha < 1$	$\beta > 1$
$\alpha = 0$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\beta < 1$	$\beta > 1$
$\alpha < 0$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\beta < 1$	$\beta - \alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\beta - \alpha = 1$ et $\beta = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\alpha = 0$.



c) Posons

$$f(t) = \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,.$$

Si $\alpha = 0$ la fonction f est nulle et l'intégrale converge.

Si $\alpha \neq 0$ et si t tend vers l'infini, on écrit

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^\alpha - 1 \right)\,,$$

et en faisant un développement limité en 0 par rapport à $1/t$, on obtient

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = t^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{t} + \circ\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right) \sim \alpha t^{\alpha-1}\,,$$

donc

$$f(t) \sim \frac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}}\,,$$

et l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.

En 0, le résultat dépend du signe de α.

Si $\alpha < 0$

$$(1+t)^\alpha - t^\alpha = -t^\alpha \left(1 - t^{-\alpha}(1+t)^\alpha\right) \sim -t^\alpha \,,$$

car $1 - t^{-\alpha}(1+t)^\alpha$ tend vers 1. On en déduit

$$f(t) \sim -\frac{1}{t^{\beta-\alpha}} \,,$$

et l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Si $\alpha > 0$, la quantité $(1+t)^\alpha - t^\alpha$ tend vers 1 en 0, donc

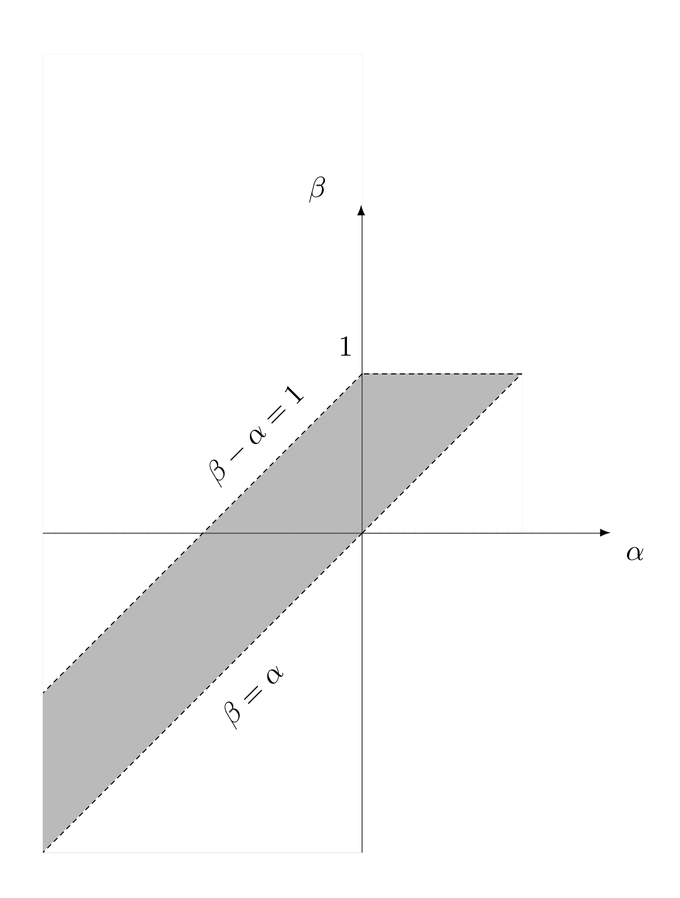
$$f(t) \sim \frac{1}{t^\beta} \,,$$

et l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

On a donc le tableau suivant :

	$\sim f(t)$ en 0	$\sim f(t)$ en ∞	condition de convergence de $\int_0^1 f(t)\,dt$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(t)\,dt$
$\alpha > 0$	$\dfrac{1}{t^\beta}$	$\dfrac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}}$	$\beta < 1$	$\beta - \alpha > 0$
$\alpha < 0$	$-\dfrac{1}{t^{\beta-\alpha}}$	$\dfrac{\alpha}{t^{\beta-\alpha+1}}$	$\beta - \alpha < 1$	$\beta - \alpha > 0$

Les couples (α, β) répondant à la question sont les points du domaine limité par les droites d'équation $\beta = 1$, $\beta = \alpha$ et $\beta = \alpha + 1$ (bords exclus), auxquels on peut ajouter la droite d'équation $\alpha = 0$.



5. L'intégrale $I(n)$ est une intégrale de Bertrand $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n(\ln x)^{-1}}$ qui converge si et seulement si $n \geq 2$. Pour la calculer dans ce cas, intégrons par parties $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx$. On a

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \int \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\,,$$

et donc

$$I(n) = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{(n-1)^2}\,.$$

6. Pour $x > 0$, posons

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}\,.$$

On a

$$0 \leq f_\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

et puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge, il résulte du théorème de comparaison que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ converge aussi.

En posant $t = 1/x$, on a $x = 1/t$ donc $dx = -dt/t^2$, et l'on obtient

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^\lambda\, dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)}\,.$$

Alors, puisque toutes les intégrales convergent, on peut additionner les deux expressions de $I(\lambda)$, et l'on trouve

$$2I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} + \int_0^\infty \frac{t^\lambda\, dt}{(t^2+1)(t^\lambda+1)} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \Big[\arctan t\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}\,.$$

7. En effectuant un développement limité en 0, on a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1-2t) + \circ(t) = t + \circ(t)\,,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1\,,$$

et la fonction se prolonge par continuité en 0. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ converge.

Posons

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt\,.$$

Si $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}\,,$$

et puisque les intégrales $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty e^{-2t}\, dt$ convergent, les intégrales I_1 et I_2 convergent également, donc $I_1 - I_2$ converge.

b) Transformons $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt$ par le changement de variable $x = 2t$. On obtient

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx\,,$$

d'où

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^\infty \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,.$$

c) On cherche la limite lorsque ε tend vers 0 du membre de droite. En utilisant la première formule de la moyenne, il existe c_ε dans $[\varepsilon,\, 2\varepsilon]$ tel que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = e^{-c_\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{dt}{t} = e^{-c_\varepsilon} \ln 2\,.$$

Comme c_ε tend vers zéro d'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $I = \ln 2$.

d) Le changement de variable $x = e^{-t}$ donne immédiatement

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = I = \ln 2\,.$$

8. a) la fonction qui à x associe $\ln \sin x$ est continue sur $]\,0,\, \pi/2\,]$. On a au voisinage de 0

$$\ln \sin x = \ln(x + \circ(x)) = \ln x + \ln(1 + \circ(1))\,,$$

donc

$$\ln \sin x = \ln x \left(1 + \frac{\ln(1+\circ(1))}{\ln x}\right)\,.$$

Mais $1 + \dfrac{\ln(1+\circ(1))}{\ln x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, et donc

$$\ln \sin x \sim \ln x\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ converge (ex 1 c) et, puisque $\ln x$ est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrale I converge.

b) Puisque $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, le changement de variable $t = \pi/2 - x$ donne immédiatement

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \cos t\,dt\,.$$

c) Alors, puisque

$$\ln \sin x + \ln \cos x = \ln(\sin x \cos x) = \ln \frac{\sin 2x}{2}\,,$$

on obtient

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2}\,dx\,.$$

d) Ceci peut s'écrire

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,dx - \frac{\pi \ln 2}{2}\,.$$

Effectuons le changement de variable $u = 2x$ dans l'intégrale du membre de droite. On trouve

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du \, .$$

Puisque $\sin(\pi - v) = \sin v$, le changement de variable $v = \pi - u$ donne

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin v \, dv \, ,$$

donc

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du = I \, .$$

Finalement

$$2I = I - \frac{\pi \ln 2}{2} \, ,$$

et donc

$$I = -\frac{\pi \ln 2}{2} \, .$$

9. a) Pour $x > 0$, posons

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{x}} \, .$$

On a au voisinage de l'infini,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{5/2}} \, ,$$

et, puisque $5/2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x) \, dx$ converge. Au voisinage de 0, on a cette fois

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}} \, ,$$

et, puisque $1/2 < 1$, l'intégrale $\int_0^1 f(x) \, dx$ converge également. L'intégrale I converge donc.

b) Pour décomposer la fraction en éléments simples on écrit tout d'abord

$$t^4 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2 = (t^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\, t)^2 = (t^2 + \sqrt{2}\, t + 1)(t^2 - \sqrt{2}\, t + 1) \, .$$

Alors

$$\frac{1}{t^4 + 1} = \frac{at + b}{t^2 + \sqrt{2}\, t + 1} + \frac{ct + d}{t^2 - \sqrt{2}\, t + 1} \, .$$

Mais comme la fonction est paire, on obtient, en changeant t en $-t$

$$\frac{1}{t^4 + 1} = \frac{-at + b}{t^2 - \sqrt{2}\, t + 1} + \frac{-ct + d}{t^2 + \sqrt{2}\, t + 1} \, ,$$

et par unicité de la décomposition $a = -c$ et $b = d$. Donc

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} + \frac{-at+b}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}\,.$$

En donnant à t la valeur 0, on obtient

$$b = \frac{1}{2}\,.$$

D'autre part, si l'on réduit au même dénominateur, le coefficient de t^2 vaut $-2a\sqrt{2}+2b$. Comme il est nul, on en déduit que

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

On écrit alors

$$\frac{at+b}{t^2+\sqrt{2}\,t+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\,,$$

et cette fonction admet comme primitive

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}\,t+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,t+1)\,.$$

(On rappelle qu'une primitive de $\dfrac{1}{at^2+bt+c}$ où $\Delta = b^2-4ac < 0$ et $a \neq 0$ est $\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{2at+b}{\sqrt{-\Delta}}$).

On obtient de même pour la primitive de l'autre morceau

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}\,t+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}\,t+1)\,.$$

Alors, une primitive de $\dfrac{1}{t^4+1}$ est,

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}\,t+1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}(\arctan(\sqrt{2}\,t+1) + \arctan(\sqrt{2}\,t-1)\,.$$

Cette fonction est nulle en 0 et admet comme limite $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ à $+\infty$ donc

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$

c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ dans I, on a $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ et l'on trouve

$$I = 2J = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.$$

10. a) On a, à l'infini,

$$\frac{1}{(x^3+1)^n} \sim \frac{1}{x^{3n}}\,,$$

et l'intégrale $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^n}$ converge si et seulement si $3n > 1$, soit $n \geq 1$.

b) En utilisant la factorisation

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)\,,$$

la fraction rationnelle $\frac{1}{x^3+1}$ se décompose sous la forme

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\,.$$

On peut obtenir les coefficients de la manière suivante :

en multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, on obtient $a = 1/3$;

en remplaçant x par 0, on trouve $1 = a + c$ d'où $c = 1 - a = 2/3$;

en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve $0 = a + b$, d'où $b = -1/3$.

Finalement

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\,\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,,$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,,$$

Pour $x \geq 0$, on obtient alors comme primitive,

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,\ln(x+1) - \frac{1}{6}\,\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} &= \left[\frac{1}{3}\,\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\,\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \ln\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\,,$$

et cette expression a pour limite 0 à $+\infty$. Par ailleurs $\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ admet pour limite $\pi/2$ en $+\infty$, et

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,,$$

d'où
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\,.$$

c) Si $n \geq 1$, l'intégrale J_n est convergente, et on peut intégrer par parties. On trouve
$$J_n = \left[\frac{x}{(x^3+1)^n}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,dx = \int_0^\infty \frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,dx\,.$$

Mais
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^3+1)^{n+1}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^3+1}{(x^3+1)^{n+1}}\,dx - \int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}\,dx = J_n - J_{n+1}\,,$$

donc
$$J_n = 3n(J_n - J_{n+1})\,,$$

d'où l'on déduit
$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n\,.$$

Alors
$$J_n = \frac{3n-4}{3n-3}\,\frac{3n-7}{3n-6} \cdots \frac{2}{3}\,J_1 = \frac{3n-4}{3n-3}\,\frac{3n-7}{3n-6} \cdots \frac{2}{3}\,\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\,.$$

11. a) On écrit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et comme $-\sin x$ est la dérivée de $\cos x$, on a immédiatement, pour $x \in [0,\, \pi/2\,[$
$$\int \tan x\,dx = -\ln\cos x\,.$$

Mais lorsque x tend vers $\pi/2$, $\cos x$ tend vers 0, et $-\ln\cos x$ vers $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ est donc divergente.

b) La fonction tangente possède une discontinuité en $\pi/2$. On se ramène en 0 en posant $u = \pi/2 - x$. Alors
$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{1}{\tan u}\,.$$

Mais au voisinage de 0, $\tan u \sim u$, donc
$$\tan x \sim \frac{1}{u}\,.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{du}{u}$ diverge, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ diverge également.

12. a) *Première méthode.* En intégrant par parties
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ admet une limite nulle en $+\infty$, et

$$\frac{|\sin x|}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

De plus l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ converge absolument, donc converge. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Deuxième méthode. En appliquant directement le critère d'Abel. La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini, par ailleurs

$$\left|\int_x^{x'} \cos t\,dt\right| = |\sin x' - \sin x| \leq 2\,,$$

donc l'intégrale converge.

Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

Alors

$$\int_\pi^x \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,dt \geq \int_\pi^x \frac{1+\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt \;= \int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt + \int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt\,. \qquad (1)$$

Mais

$$\int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x} - \sqrt{\pi}\,,$$

et ceci tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par contre, en posant $u = 2t$, on obtient

$$\int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{2\pi}^{2x} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du\,,$$

et cette expression possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, donc le membre de droite de l'inégalité (1) tend vers $+\infty$ et il en résulte que celui de gauche a la même limite. Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^x \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge.

b) Comme la fonction qui à x associe $\cos(x^2)$ est continue sur $[-1,\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge, et de même l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx$

converge si et seulement si l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx$ converge. En faisant le changement de variable $t = x^2$ on obtient,

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt\,,$$

et également

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} |\cos(x^2)|\,dx = \int_{\pi}^{\infty} \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt\,.$$

Il résulte de a) que l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ est semi-convergente, et donc que l'intégrale $\int_{-1}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ est également semi-convergente.

c) On effectue le changement de variable $u = x^4$. L'intégrale devient

$$\int_{\pi}^{\infty} x^2 \sin(x^4)\,dx = \frac{1}{4}\int_{\pi^4}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}}\,du\,.$$

La situation est identique à celle de l'exercice a). La fonction qui à t dans $[\pi,\, \infty[$ associe $1/t^{1/4}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini. Par ailleurs

$$\left|\int_{x}^{x'} \sin t\,dt\right| = |\cos x - \cos x'| \leq 2\,,$$

donc la critère d'Abel permet de conclure que l'intégrale $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin u}{u^{1/4}}\,du$ converge.

Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité

$$|\sin u| \geq \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}\,.$$

et conclure comme dans a).

d) On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}$. L'intégrale devient

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \frac{2e^{it}}{t}\,dt\,.$$

On applique alors la même méthode que dans a) aux parties réelle et imaginaire

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \frac{2\cos t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} \frac{2\sin t}{t}\,dt\,,$$

ce qui montre que ces deux intégrales convergent, donc $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}\,dx$ converge. Par contre, puisque $|e^{i\sqrt{x}}| = 1$, et que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, l'intégrale proposée n'est pas absolument convergente.

13. Raisonnons par l'absurde. S'il existe un nombre réel c tel que $f(c)$ ne soit pas nul, on peut, quitte à prendre la fonction $-f$, supposer que $f(c) > 0$. Comme f est continue en c, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ non réduit à un point, tel que $f(x) > 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Soit alors m le minimum de f sur $[\alpha, \beta]$. Ce minimum est atteint en un point de cet intervalle et donc $m > 0$. Si la fonction f est $T-$périodique, on a, pour tout entier n positif,

$$\int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq m(\beta-\alpha) > 0\,.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge, le critère de Cauchy s'applique et il existe $A > 0$ tel que $A < X < Y$ implique

$$\left|\int_X^Y f(x)\,dx\right| < m(\beta-\alpha)\,.$$

Mais comme la suite $(\alpha + nT)$ tend vers plus l'infini, il existe N tel que $n \geq N$ implique $\alpha + nT \geq X$. Dans ce cas

$$\int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx = \left|\int_{\alpha+nT}^{\beta+nT} f(x)\,dx\right| < m(\beta-\alpha)\,.$$

On obtient bien une contradiction.

14. Raisonnons par l'absurde, et nions le fait que f tende vers 0 à l'infini. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$, tel que pour tout nombre A, il existe $x_A \geq A$ tel que $|f(x_A)| \geq \varepsilon$.

En utilisant la continuité uniforme de f, il existe $\alpha > 0$ tel que, l'inégalité $|x - x'| \leq \alpha$, implique

$$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon/2\,.$$

En particulier, si

$$x_A \leq t \leq x_A + \alpha\,,$$

on a

$$|f(x_A) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et donc

$$f(x_A) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) \leq f(x_A) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si $f(x_A) > 0$, on a $f(x_A) \geq \varepsilon$ et

$$f(t) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

donc

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| = \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}\,.$$

Si $f(x_A) < 0$, on a $-f(x_A) \geq \varepsilon$ et

$$f(t) \leq f(x_A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

donc

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| = -\int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \geq \frac{\alpha\varepsilon}{2}\,.$$

Il existe donc un nombre $\beta = \alpha\varepsilon/2$ pour lequel, pour tout A, on a trouvé deux nombres x_A et $x_A + \alpha$ vérifiant les inégalités $A \leq x_A \leq x_A + \alpha$ et

$$\left| \int_{x_A}^{x_A+\alpha} f(t)\,dt \right| \geq \beta\,.$$

Cela signifie que la propriété de Cauchy n'est pas satisfaite, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ diverge, d'où une contradiction.

15. a) La relation

$$f'(x) = O(1/x^2)$$

signifie que la fonction $x \mapsto x^2 f'(x)$ est bornée au voisinage de l'infini, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres $a > 0$ et $M > 0$, tels que, si $|x| \geq a$, on ait

$$x^2|f'(x)| \leq M\,,$$

c'est-à-dire

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{x^2}\,.$$

On remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, et donc, de l'inégalité précédente, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty f'(t)\,dt$ converge absolument donc converge. Mais

$$\int_a^\infty f'(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f'(x)\,dx = f(X) - f(a)\,.$$

Il en résulte que la fonction f a une limite en $+\infty$ qui vaut $\displaystyle\int_a^\infty f'(x)\,dx + f(a)$.

La démonstration est analogue à $-\infty$.

b) Si x et x' sont deux réels quelconques tels que $x < x'$, on a encore

$$|f(x) - f(x')| = \left| \int_x^{x'} f'(t) \right| dt \le \int_x^{x'} |f'(t)| \, dt \, .$$

L'intégrale de droite se majore par

$$\int_x^{x'} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x' - \arctan x \, ,$$

et puisque la fonction arctangente est comprise entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, on a finalement

$$|f(x') - f(x)| \le \arctan x' - \arctan x \le \pi \, .$$

En faisant tendre x vers $-\infty$ et x' vers $+\infty$, on obtient alors, par passage à la limite dans les inégalités

$$|L - \ell| \le \pi \, .$$

16. a) Comme f décroit, on peut minorer $f(t)$ par $f(2x)$, lorsque t appartient à l'intervalle $[\, x, \, 2x \,]$. Alors

$$\int_x^{2x} f(t) \, dt \ge \int_x^{2x} f(2x) \, dt = x f(2x) \, .$$

Si $x > a/2$, on a donc,

$$0 \le x f(x) \le 2 \int_{x/2}^{x} f(t) \, dt \, .$$

Comme l'intégrale converge, il existe, d'après le critère de Cauchy, un nombre A, tel que les inégalités $A \le u \le v$ impliquent

$$\left| \int_u^v f(t) \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Alors si $x \ge 2A$, on a $A \le x/2 \le x$, et

$$0 \le x f(x) \le 2 \int_{x/2}^{x} f(t) \, dt < \varepsilon \, .$$

On en déduit que $x f(x)$ tend vers 0 à l'infini.

b) La fonction f définie sur $[\, 2, \, \infty \, [$ par

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \, ,$$

et telle que $xf(x)$ tende vers 0 à l'infini. On vérifie facilement qu'elle est décroissante. Par contre l'intégrale de f diverge, puisque

$$\int_2^x \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x - \ln\ln 2$$

a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

17. Soit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$a_n = n - \frac{1}{n^2 2^n} \quad \text{et} \quad b_n = n + \frac{1}{n^2 2^n}\,.$$

Remarquons tout d'abord que si $n \geq 1$, on a

$$\frac{2}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 3 < 4 \leq 2^{n+1}\,,$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{n^2 2^n} + \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}} < 1\,,$$

et enfin que

$$n + \frac{1}{n^2 2^n} < n + 1 - \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\,.$$

Alors les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ vérifient les inégalités

$$a_n < n < b_n \leq a_{n+1} < n+1 < b_{n+1}\,.$$

Les deux suites sont croissantes et tendant vers $+\infty$.

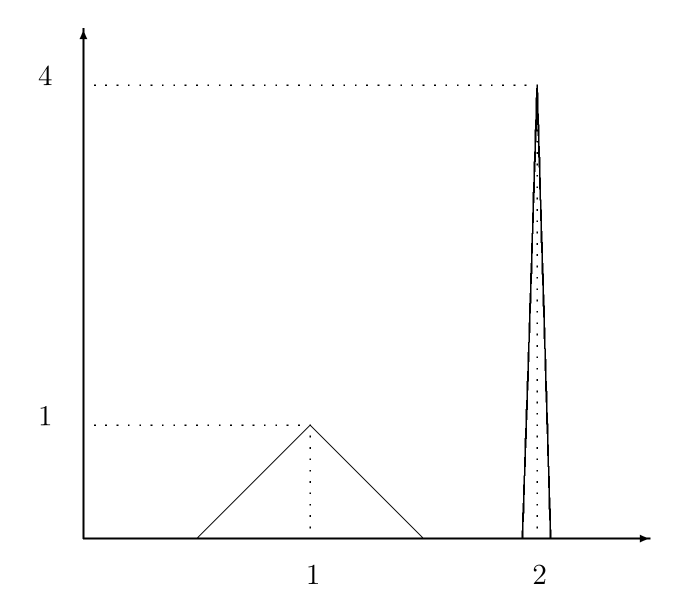
On peut définir une fonction g sur $[\,0,\,\infty\,[$ continue et positive de la manière suivante :

pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$g(n) = n^2 \quad , \quad g(a_n) = g(b_n) = 0\,,$$

et g est linéaire affine sur les intervalles $[\,a_n,\,n\,]$ et $[\,n,\,b_n\,]$ et est nulle partout ailleurs.

Voici par exemple le graphe de g sur $[\,0,\,5/2\,]$.



On a alors

$$\int_0^{b_n} g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} g(x)\,dx\,.$$

Mais $I_k = \int_{a_k}^{b_k} g(x)\,dx$ est l'aire d'un triangle dont la hauteur vaut k^2, et la base $2/(k^2 2^k)$. On a donc $I_k = 1/2^k$. Alors

$$\int_0^{b_n} g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

(C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/2).

La fonction g étant positive, et (b_n) ayant pour limite $+\infty$, on a alors

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{b_n} g(x)\,dx = 1\,.$$

Si l'on pose

$$f(x) = \begin{cases} = g(x)/x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}\,.$$

La fonction f est continue sur $]\,0,\,\infty\,[$ comme quotient de deux fonctions continues. Par ailleurs f est nulle sur $[\,0,\,1/2\,]$, donc continue. Il en résulte que f est continue sur $[\,0,\,\infty\,[$. On a aussi

$f(n) = n$ et f n'est pas bornée. Enfin l'intégrale $\int_0^\infty x f(x)\, dx$ converge, puisque

$$\int_0^\infty x f(x)\, dx = \int_0^\infty g(x)\, dx = 1\,.$$

18. a) Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, posons

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n(1+x^2)}\,.$$

Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = g(x)\,.$$

Comme l'intégrale $\int_0^\infty g(x)\, dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\int_0^\infty f_n(x)\, dx$ convergent. Par ailleurs

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2n}\,,$$

et donc la suite (f_n) converge uniformément, donc uniformément localement, vers la fonction nulle. Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers

$$\int_0^\infty 0\, dx = 0\,.$$

b) Pour $x \in [\,0,\,1\,]$ et $n \geq 0$, posons

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}\,.$$

Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 = g(x)\,.$$

La fonction g et les fonctions f_n sont Riemann-intégrables sur $[\,0,\,1\,]$. Par ailleurs la suite f_n converge simplement sur $[\,0,\,1\,[$ vers la fonction $f = 1$. Sur $[\,0,\,\alpha\,]$, avec $\alpha \in]\,0,\,1\,[$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq \alpha^n\,,$$

et il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[\,0,\,\alpha\,]$. La suite (f_n) converge donc uniformément localement vers f sur $[\,0,\,1\,[$. Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers

$$\int_0^1 1\, dx = 1\,.$$

c) Pour $x \in]\,1,\,\infty\,[$ et $n \geq 0$, posons

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}\,.$$

Tout d'abord, si $n \geq 2$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_2(x) = g(x)\,.$$

Comme $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$ convergent si $n \geq 2$. Par ailleurs la suite f_n converge simplement sur $[\,1,\,\infty\,[$ vers la fonction $f = 0$. Sur $[\,\alpha,\,\infty\,]$, avec $\alpha > 0$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+\alpha^n}\,,$$

et il en résulte que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[\,\alpha,\,\infty\,[$. La suite (f_n) converge donc uniformément localement vers f sur $]\,1,\,\infty\,[$. Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers

$$\int\limits_0^1 0\,dx = 0\,.$$

d) Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, posons

$$f_n(x) = \frac{\arctan \frac{n+1}{n}\,x}{1+x^2}\,.$$

Tout d'abord

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x^2} = g(x)\,.$$

Comme l'intégrale $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ converge, il résulte du théorème de comparaison que toutes les intégrales $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx$ convergent. Par ailleurs, f_n tend simplement vers la fonction f qui à x associe $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$. Soit x dans l'intervalle $[\,0,\,\alpha\,]$, où $\alpha > 0$. On a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left|\arctan\left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - \arctan x\right|\,.$$

En appliquant l'égalité des accroissements finis, il existe c dans $[\,0,\,\alpha\,]$ tel que

$$\left|\arctan\left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - \arctan x\right| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\,x - x\right|\,\frac{1}{1+c^2} = \frac{x}{n(1+c^2)} \leq \frac{\alpha}{n}\,,$$

et la suite (f_n) converge uniformément sur $[\,0,\,\alpha\,]$ donc uniformément localement sur $[\,0,\,\infty\,[$, vers la fonction f. Alors le théorème de convergence dominée montre que la suite (a_n) converge vers

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,(\arctan x)^2\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

19. a) On a

$$f(x) = g(x)(1+g(x))\,.$$

Comme $g(x)$ tend vers 0 à l'infini (produit d'une fonction bornée, par une fonction tendant vers 0), on en déduit que $f\sim g$ au voisinage de l'infini.

b) Comme dans l'exercice 12, l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ est semi-convergente, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^\infty (f(x)-g(x))\,dx$ n'est pas convergente. Il en résulte que $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ n'est pas convergente.

20. a) On a, au voisinage de -1,

$$f(x)\sim -\frac{1}{2}\,\ln|x+1|\,,$$

et puisque $\ln|u|$ admet comme primitive $u\ln|u|-u$, on voit facilement que les intégrales

$$\int_{-1}^0 \ln|1+x|\,dx \quad\text{et}\quad \int_{-2}^{-1}\ln|1+x|\,dx\,,$$

sont convergentes.

b) Au voisinage de l'infini, on a,

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x}\,\frac{x}{x^2+1}\left(1+\frac{\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|}{\ln|x|}\right)\sim\frac{\ln|x|}{x}\,,$$

et l'intégrale de $\ln|x|/x$ est divergente car la fonction a pour primitive $(\ln|x|)^2/2$. Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ sont donc divergentes.

c) On a

$$\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= \frac{x}{x^2+1}\,\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\\
&= \frac{x}{x^2+1}\,\ln\left|\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\right|\\
&= \frac{x}{x^2+1}\left(\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|-\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|\right)\,.
\end{aligned}$$

Posons $u = 1/x$. En effectuant un développement limité au voisinage de 0 on obtient

$$\ln|1+u| - \ln|1-u| = \ln(1+u) - \ln(1-u) = 2u + \circ(u) \sim 2u = \frac{2}{x}\,,$$

donc, à $+\infty$,

$$f(x) + f(-x) \sim \frac{2}{x^2}\,,$$

et l'intégrale $\int\limits_0^\infty (f(x) + f(-x))\,dx$ converge absolument. Cela signifie en particulier que

$$g(A) = \int\limits_0^A (f(x) + f(-x))\,dx\,,$$

possède une limite lorsque A tend vers $+\infty$. Mais,

$$\int\limits_0^A f(-x)\,dx = \int\limits_{-A}^0 f(x)\,dx\,,$$

et donc

$$g(A) = \int\limits_{-A}^A f(x)\,dx\,,$$

d' où le résultat.